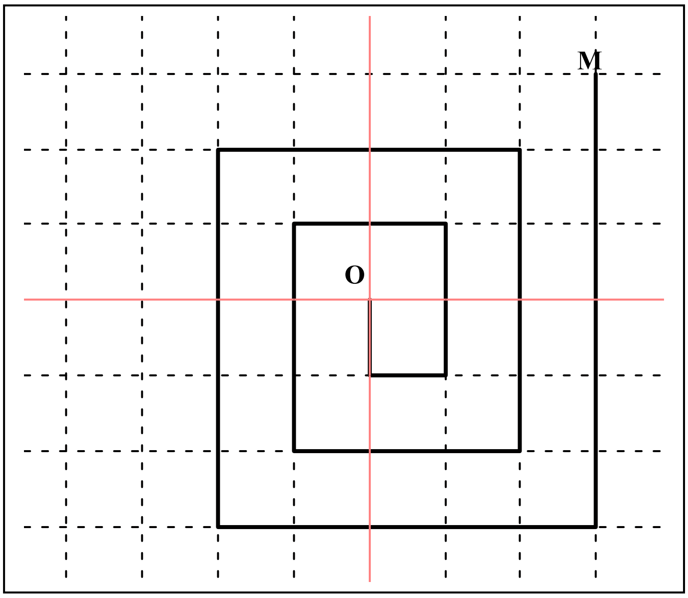
OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES
ACADÉMIE D'ORLÉANS TOURS
CLASSE DE PREMIÈRE

Mercredi 15 mars 2006

DURÉE : 4 heures

Exercice 1 : la « spirale »

Le plan, muni d'un repère orthonormal d'origine O (unité 1 cm), est quadrillé par les droites parallèles aux axes de coordonnées et passant par tous les points à coordonnées entières du plan. Sur ce quadrillage on construit, en partant du point O vers le bas, une ligne brisée en forme de « spirale » qui « tourne dans le sens contraire des aiguilles d'une montre », conformément au dessin ci-dessous.
Pour tout point M à coordonnées entières, on note *l*(M) la longueur de la portion de « spirale » qui va du point O jusqu'au point M.



1) Soit A un point de l'axe des abscisses tel que OA=5.
   Déterminer les valeurs possibles de *l*(A).

2) Soit B le point de coordonnées (2005 ; 2006).
   Déterminer *l*(B).

3) Déterminer les coordonnées du point C tel que *l*(C)=2006.

4) La « spirale » passe-t-elle effectivement par tous les points à coordonnées entières du plan ?

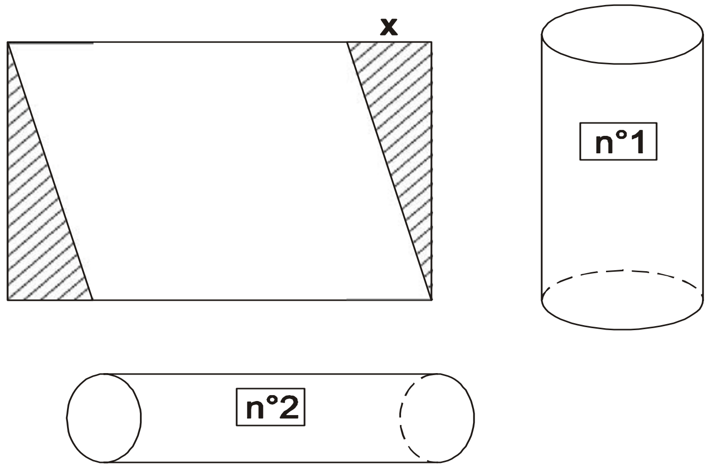
On rappelle le résultat suivant : Pour tout entier naturel n non nul, 1+2+3+…+n = $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

****

Exercice 2 : les cylindres en papier

1. On prend une feuille de papier de 21 cm de large et 29,7 cm de long (le format A4). On forme un cylindre en roulant la feuille de papier et en faisant coïncider deux bords opposés. En faisant de même avec les deux autres bords opposés, on obtient un autre cylindre.
Les deux cylindres ont-ils même volume ?

2. Dans une feuille de papier de format A4, on enlève deux triangles de mêmes dimensions selon la figure ci-dessous :



Si on roule la feuille restante bord à bord, on obtient un premier cylindre (n°1). Si on la roule en faisant coïncider les autres bords opposés, on obtient un second cylindre (n°2).

Trouver la ou les valeurs de x (en cm) pour que les deux cylindres ainsi obtenus aient le même volume.

****

Exercice 3 : Le pentagone régulier.

Soit ABC un triangle isocèle (AB=AC) dont l'angle en A est obtus ($\pi/2 < \hat{A} < \pi$).
Pour les constructions on prendra AB = 8 cm.
Toutes les constructions demandées se feront à la règle et au compas. On laissera apparentes sur la feuille les constructions intermédiaires.

1° Sur votre feuille, compléter le triangle ABC par deux points D, E de telle sorte que AB=BD=DE=EC, que la figure ABDEC admette pour axe de symétrie la bissectrice de l'angle Â et que les points D et A ne soient pas du même coté de la droite (BC).

2° En déduire la construction d'un pentagone AMNPQ dont les cinq côtés ont la même longueur et tel que le point M appartienne au segment [AB], les points N et P appartiennent au segment [BC] et le point Q appartienne au segment [CA] . On expliquera et justifiera la construction.

3° a) On suppose que le pentagone ABDEC de la question 1° est régulier (ses angles en A, B, C, D, E sont alors égaux). Quelle est la valeur nécessaire de l'angle Â ? On note β cette valeur, et on pose $\alpha = \frac{\beta}{3}$.

Montrer que $\alpha = A\hat{B}C$ et que $2\alpha = C\hat{B}D$. En déduire que l'angle α vérifie la relation particulière :

$$\cos(\alpha) = \frac{1}{2} + \cos(2\alpha)$$

3° b) Inversement on suppose que Â = β . Démontrer qu'alors le pentagone ABDEC est régulier.

****

Exercice 4 : La tête à l'envers.

On rappelle qu'en écriture décimale, le nombre A= 3457 se « déchiffre » par l'égalité :

$$A= 3 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 7.$$

Pour chaque entier n > 0 on note R_n le reste de la division euclidienne de 10^n par 7, c'est-à-dire l'unique entier R_n satisfaisant à $10^n = 7q + R_n$ et $0 \leq R_n < 7$, q étant un entier (qui dépend de n).
On a ainsi par exemple $R_1=3$, puisque $10=7\times1+3$.

1° Calculer R_n pour tous les entiers $n \leq 7$.

2° On indique que $R_{24}=1$. En déduire simplement R_{25} puis R_{26} , R_{27} etc..jusqu'à R_{31}. Exprimer alors simplement la valeur de R_n pour toute valeur de n.

3° Soit a un entier et x l'entier $a\times10^n$. Démontrer que le reste de la division de x par 7 est le même que celui de la division par 7 du nombre $a\times R_n$.

4° Déterminer les deux plus petites valeurs de n telles que le nombre entier $3\times10^n-1$ soit divisible par 7.

5° A tout nombre entier N on associe un nombre entier noté f(N) de la manière suivante : à partir de l'écriture décimale de N on retire son premier chiffre à gauche et on le place à la fin de l'écriture obtenue.
Ainsi par exemple : f(**3**547)= 547**3** ou encore : f(10) = 01 =**1.**
On suppose que l'écriture décimale de N est $N = \mathbf{a_n}\, a_{n-1}\, a_{n-2}\, a_{n-3} \ldots\ldots\ldots a_2\, a_1\, a_0$ (les entiers a_k sont les chiffres du nombre N qui comporte donc n+1 chiffres). Il en résulte que f(N) s'écrit $a_{n-1}\, a_{n-2}\, a_{n-3} \ldots\ldots\ldots a_2\, a_1\, a_0\, \mathbf{a_n}$.

a) Montrer que N peut s'écrire $10^n a_n + B$ où B est un nombre entier dont on précisera l'écriture décimale, et que f (N) s'écrit alors $10\times B + a_n$.

b) En déduire les deux plus petits nombres entiers N tels que $f(N) = 3 \times N$.

****