Fiche prof : **Le verre à moitié plein**

<u>Niveau concerné :</u> classe de 3e

<u>Place de l'activité dans l'année</u> :
Avril. Les élèves ont étudié les fonctions, les fonctions linéaires, les sections du pavé droit, du cylindre, du cône et de la pyramide, mais pas la règle « k, k²,k^3 ».
Les formules de volumes (cylindre, cône, pyramide) ont été revues dans une fiche récente de calcul mental.
Ils ont déjà fait un problème de recherche sur des volumes (voir activité « boîte de volume maximal »), et ont à cette occasion manipulé des unités métriques de volumes, utilisé le tableur pour trouver leur conjecture, représenté graphiquement la fonction donnant le volume en fonction du côté du carré enlevé à chaque « coin » de leur feuille A4.

<u>Objectifs de l'activité :</u>

- Faire manipuler des volumes.
- Utiliser la formule du calcul du volume du cône.
- Voir un exemple de fonction linéaire, et un exemple de fonction non linéaire.(volume en fonction de la hauteur dans un cylindre et dans un cône) et les représenter graphiquement.
- Voir que dans une réduction à l'échelle $\frac{1}{2}$, les volumes ne sont pas multipliés par $\frac{1}{2}$ (cette activité sera une « référence » pour les éventuelles erreurs de ce type)
- Faire une conjecture, la tester, décrire sa méthode.
- Identifier un problème, modéliser une situation de la vie courante, en ayant conscience de ses limites dans ce cas.
- Utiliser le tableur pour répondre au problème posé.
- Réinvestissement du théorème de Thalès (type 4e)
- Section d'un cylindre et cône par un plan parallèle à la base.
- Travailler en groupes.
- Conversions d'unités de volume, en particulier entre les unités de capacités et le système métrique.

<u>Description de l'activité :</u>

<u>Temps 1 :</u> Le professeur présente 2 verres : un en forme de cylindre, un en forme de cône.
Il présente la problématique aux élèves : Jusqu'où verser pour que le verre soit à moitié plein ?

Le professeur demande aux élèves de faire sur leur feuille de recherche un schéma (sans préciser quel type, coupe ou représentation en perspective) pour représenter chaque verre et d'indiquer sur leurs schémas leur avis en justifiant, ou sinon leur conjecture sur la hauteur jusqu'à laquelle il faut verser .

1. **<u>Pour le verre cylindrique</u>** : il est probable que les élèves donneront la mi-hauteur comme « forte » conjecture.

On peut prouver que le volume est proportionnel à la hauteur de remplissage, donc pour le problème présent, *que pour une hauteur « 2 fois plus petite », le volume sera bien « 2 fois plus petit ».(propriété de linéarité des fonctions linéaires)*

2. **<u>Pour le verre en forme de cône :</u>** Différentes conjectures devraient apparaître, dont peut-être celle de la mi-hauteur (peu probable), plus vraisemblablement « plus haut que le milieu de la hauteur » . (il faudra se mettre d'accord sur le terme « hauteur »)

<u>Remarque</u> : Le verre choisi a 6 cm de rayon et 7,5 cm de hauteur, il est légèrement tronqué.
Expérimentalement, on trouve 5,6 cm environ, alors que si le verre était vraiment conique, la hauteur serait d'environ 6 cm . Cette différence apparaîtra au cours des calculs et devra être expliquée.
Ce qui est important ici, c'est de bien faire remarquer que c'est <u>« beaucoup plus » que la moitié</u> de la hauteur (3,75 cm dans ce cas)

Temps 2 : Travail en groupes :

- Les élèves sont par groupe de deux. On distribue à chaque groupe un verre conique et une fiche fichier fiche_eleve_verre) par élève, sur laquelle leur est demandé une conjecture sur la hauteur cherchée. Ils doivent tracer avec un feutre sur le verre le niveau correspondant à leur conjecture.
- Ensuite seulement, on distribue une bouteille contenant de la semoule, et un autre récipient pour la reverser ensuite (des entonnoirs en papier peuvent être utiles pour éviter les « fuites »). On demande de vérifier leur conjecture, et d'être capable d'expliquer leur méthode de vérification. (vraisemblablement que cette vérification sera expérimentale). Et d'écrire si leur conjecture semble vraie ou non.

Temps 3 : Modélisation et calculs :

Volume du verre : il faut mesurer les grandeurs utiles. Les faire écrire aux élèves. Ils mesurent, et on se met d'accord sur les dimensions : 7,5 cm de hauteur et 6 cm de rayon .
Les élèves effectuent le calcul. Normalement la formule est connue. Il s'agit donc juste de substituer les lettres par leur valeurs numériques. On trouve environ 283 cm^3 pour le volume total. Les élèves seront peut-être surpris par un tel « grand » nombre et une mise au point sera sans doute nécessaire pour faire la correspondance avec les unités de capacité.

Volume du contenu : là aussi, il nous faut les grandeurs utiles. La hauteur est déjà connue, mais pas le rayon. Celui-ci est plus difficile à mesurer. Soit les élèves ont l'idée qu'on peut le calculer, soit le professeur leur demandera de chercher une possibilité de le calculer.
La configuration est trouvée par les élèves, puis marquée au tableau. On demande alors aux élèves d'effectuer leur calcul du rayon, avec la hauteur conjecturée, puis du volume de la semoule, et de comparer avec le volume du verre entier.

Ce résultat aurait dû normalement permettre de valider certaines hauteurs trouvées, mais ce ne sera sans doute pas le cas (avec une hauteur de 5,6 cm trouvée expérimentalement on trouve environ 235 cm^3 pour le double du volume de la semoule) .
On va chercher une généralisation des calculs (fichier fiche_calculs_volume_petit_cone)
Les élèves devraient penser à un calcul littéral. le calcul du volume en fonction de la hauteur est accessible, et pourra être pris en charge par les élèves avec une aide plus ou moins importante, ou par le professeur.
On vérifie que cette formule trouvée est cohérente avec les calculs précédents.
Le professeur (ou les élèves) propose(nt) alors d'utiliser un tableur pour pouvoir calculer rapidement des volumes correspondants à différentes hauteurs .

Temps 4 : suite en salle multimédia : utilisation du tableur voir fiche élève

- Les élèves complètent une feuille de calcul qui permet de faire calculer les volumes obtenus pour des hauteurs allant de 0 à 7,5 cm ,(voir fichier fiche_eleve_tableur) puis lisent sur le tableau une approximation de la hauteur qui permet d'avoir le verre à moitié plein.
- On peut aussi leur demander une représentation graphique (voir fichier fiche_eleve_graphique) du volume en fonction de la hauteur, qui permettra de faire des lectures graphiques, par exemple, quel est le volume pour la mi-hauteur ? …

Temps 5 : prolongements : (voir fichier fiche_eleve_suite)

Calculer pour la mi-hauteur quelle proportion représente le volume obtenu par rapport au volume total. Voir que le volume est $\frac{1}{8}$ du volume total.

Temps 6 : généralisation:

- Etablir que pour n'importe quel cône , si on remplit à mi hauteur, le volume obtenu est 8 fois plus petit que le grand volume. Pris en charge par le Professeur. (Voir fichier généralisation)

Remarque :
Généralisation pour une réduction du cône à l'échelle k, le volume est multiplié par k^3
Des exemples avec le carré et le cube, généralisation de la règle k, k^2,k^3(voir fichier agrandissement-reduction-leçon).