Quel est le lien entre un brocoli et un flocon de neige ?

Si on observe une fougère à l'oeil nu, on peut constater une certaine régularité, certaines répétitions.

Ainsi, la structure de base que l'on observe semble se reproduire si on zoome sur chaque partie de la fougère : on retrouve la "même" forme de feuille à des échelles plus grandes.

C'est la notion de **fractale**.

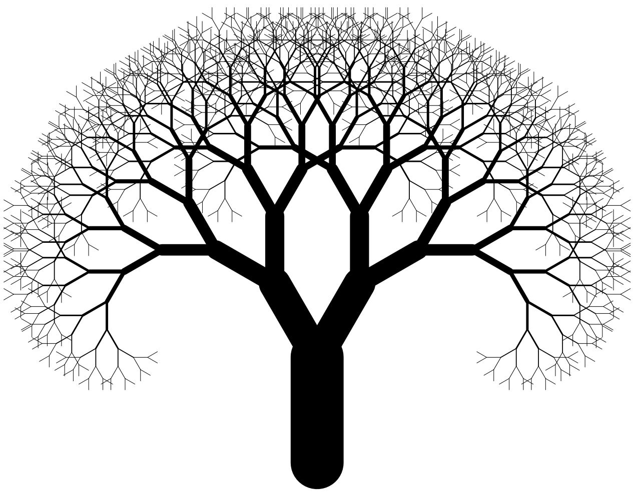
Ces régularités à différentes échelles se retrouvent très fréquemment dans la nature.

Le but de cet atelier est d'en observer quelques-unes puis d'étudier de manière mathématiques un cas simple.

I. Quelques exemples de fractales dans la nature

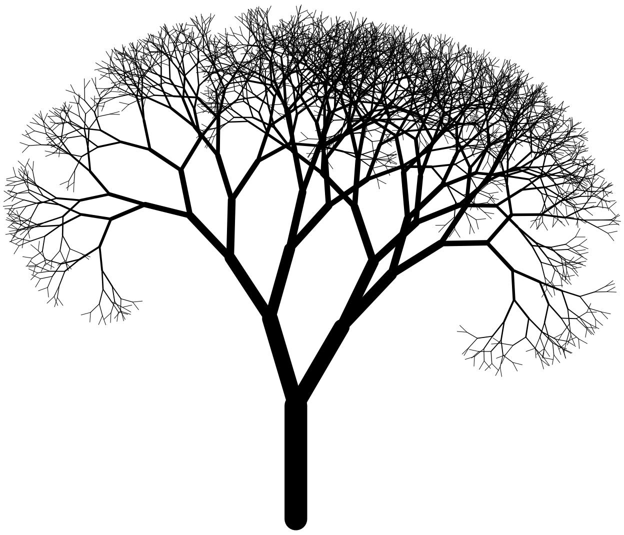
- un brocoli peut être considéré comme une fractale :
  Voici un modèle mathématique qui reconstitue l'allure d'un brocoli :

- un arbre "théorique" peut être considéré comme une fractale :



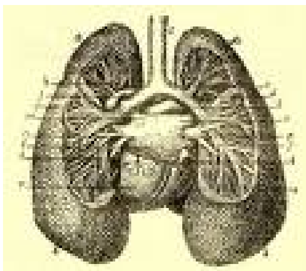
Certes cet figure représente un arbre "idéal", sans défaut avec un régularité parfaite, mais on reconnaît sans peine une structure familière, celle d'un arbre.

En modifiant quelques peu les données, on peut faire intervenir une certaine irrégularité et on obtient la représentation suivante :



- la foudre peut être modélisée à l'aide d'une fractale :

- les poumons avec les différentes bronches peuvent être modélisés avec une fractale :



- certaines côtes maritimes aussi ...

Mais avant de pouvoir comprendre cela, nous devons construire des fractales dans des cas simples.

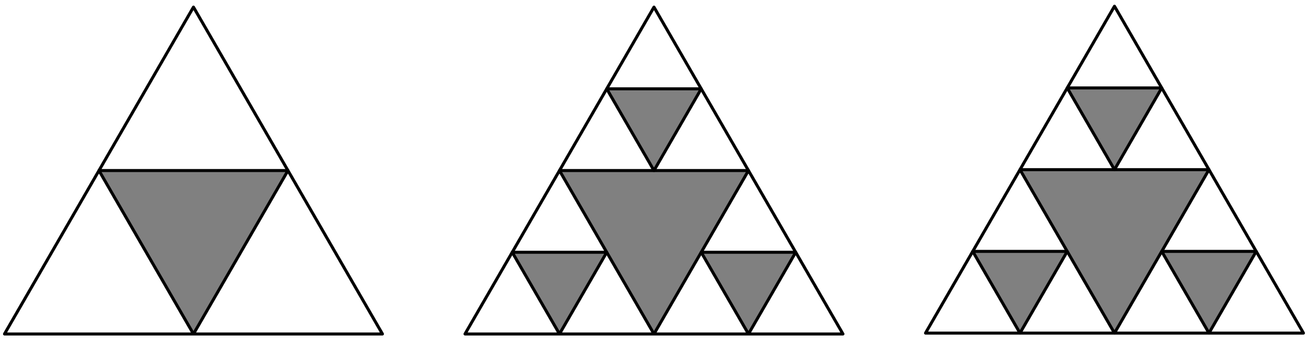
II. Construire des cas simples de fractales

1. Un peu d'histoire :

La notion de fractale a été étudiée de manière plus poussée par Benoît Mandelbrot à partir de 1 965 et si pour nous un fractale est quelques chose de très régulier, cette notion a été introduite pour modéliser des phénomènes très **irréguliers**. Il a défini la notion de dimension fractale qui permet de mesurer l'irrégularité d'une figure.

2. Le triangle de SIERPINSKY :

On part d'un triangle équilatéral. À chaque étape, on construit dans chaque triangle équilatéral non coloré un triangle équilatéral (ayant pour sommet les milieux des côtés, pour que cela soit joli).



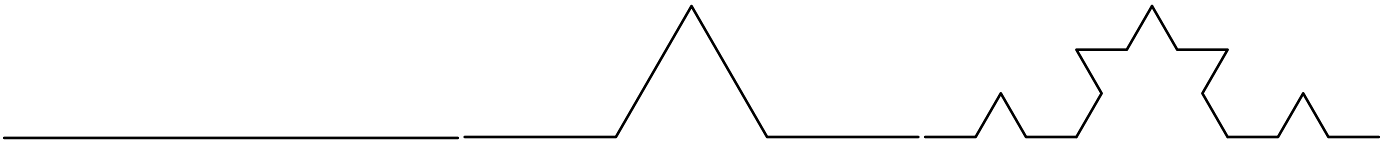
étape 1 étape 2 étape 3 (à compléter)

a. Compléter l'étape 3. Combien de triangles grisés avez-vous rajoutés lors de cette étape ?

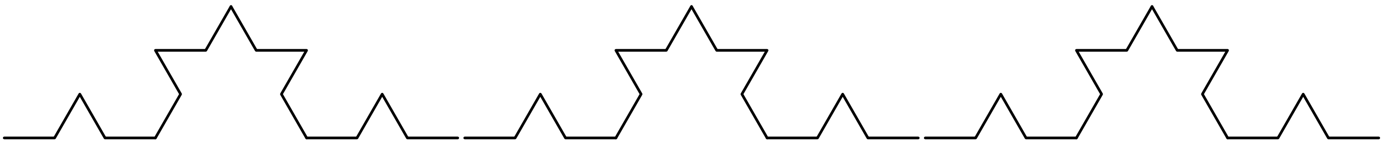
b. Combien de triangles seront rajoutés lors de la quatrième étape ?

3. Le flocon de von KOCH :

On part d'un segment. À chaque étape, on coupe chaque segment en trois parties égales et on construit sur le segment central une partie de triangle équilatéral.

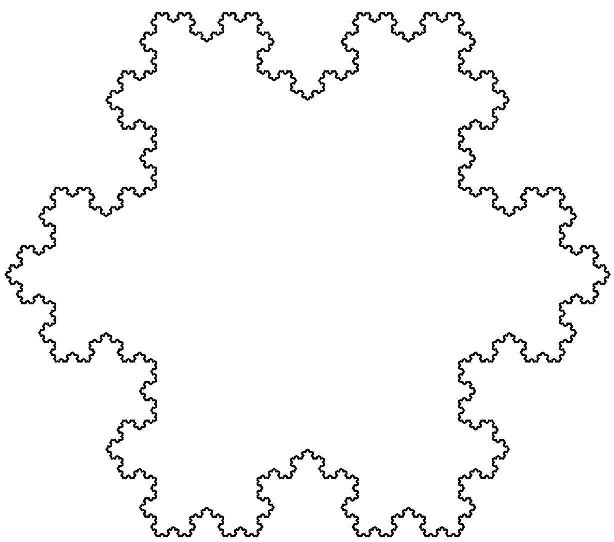


étape 0 étape 1 étape 2



étape 3 (à compléter) étape 4 (à compléter) étape 5 (à compléter)

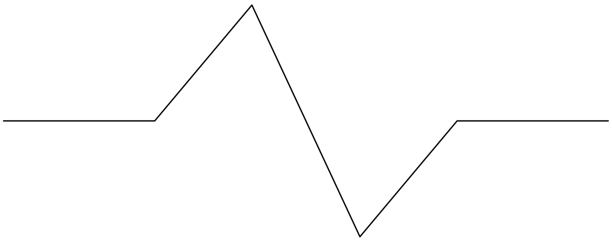
En reproduisant ce procédé une infinité de fois, on peut obtenir le flocon de Von Koch :



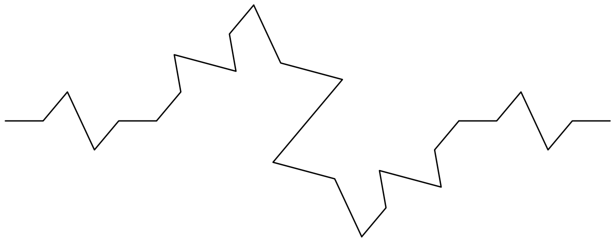
Cette figure possède une aire finie et on peut montrer que son périmètre est infini (voir **III**) !

4. **<u>Légère modification du flocon de von KOCH : une côte maritime ?</u>**

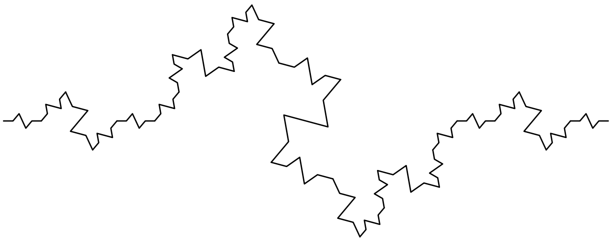
On modifie légèrement le dessin de base que l'on reproduit :



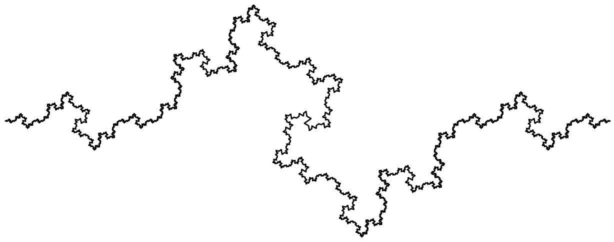
étape 1



étape 2



étape 3



étape 5

5. **<u>L'ensemble de Mandelbrot</u>**

III. Petite étude du flocon de Von Koch

On reprend les figures du **3.** en considérant qu'à l'étape 0, le segment a pour mesure 27 cm.

1. Déterminer la longueur du contour à l'étape 1, puis celle à l'étape 2 et celle à l'étape 3.

2. Si je note L_n la longueur à l'étape n, par quoi doit-on multiplier L_n pour obtenir L_{n+1} ?

3. Comment pourrait-on déterminer la longueur du contour à l'étape 30.

4. À l'aide de votre calculatrice, que peut-on dire du comportement de L_n lorsque n devient de plus en plus grand ?

5. **<u>Bilan :</u>**

Pour le flocon de Von Koch obtenu avec une infinité d'étapes, on peut dire que l'aire du flocon est (car le flocon est contenu dans un disque d'aire finie) et que son périmètre est .