DOCUMENT RESSOURCE EN LIEN AVEC LES OLYMPIADES ACADÉMIQUES 2024

Partitions d'un ensemble fini

ACADÉMIE D'ORLÉANS-TOURS

Liberté
Égalité
Fraternité

TEXTE ÉCRIT
&
MIS EN PAGES
DANS L'ACADÉMIE
D'ORLÉANS-TOURS
LE 19 MAI 2024

Partitions d’un ensemble fini

Le présent document est fondé sur un travail de Vincent Pantaloni, lui-même réalisé à partir de la lecture d’un article du blog de David Butler (univ. Adélaïde, AUS).

https://blogs.adelaide.edu.au/maths-learning/2023/08/12/gerry-mean-dering

On s’intéressera notamment :

- *au cardinal de l’ensemble des partitions d’un ensemble fini non vide en un nombre fixé de sous-ensembles ;*
- *au cardinal de l’ensemble des partitions d’un ensemble fini non vide ;*
- *à l’existence d’une partition dont la « moyenne des moyennes des sous-ensembles » est minimale ;*
- *à la forme générale de la ou des partitions qui réalisent ce minimum.*

1 PARTITION D’UN ENSEMBLE FINI EN UN NOMBRE FIXÉ DE PARTIES

1.1 Partition d’un ensemble

Soit un ensemble E et $\mathcal{E}$ un ensemble de parties de E (c’est-à-dire un sous-ensemble ou encore une partie de $\mathfrak{P}(E)$), on dit que $\mathcal{E}$ est une partition de E si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1. Tout élément de $\mathcal{E}$ est non vide.
2. Tout élément de E appartient à un et un seul élément de $\mathcal{E}$.

Remarque. — On notera que la condition 2 ci-dessus peut s’expliciter en disant que les parties qui constituent $\mathcal{E}$ sont deux à deux disjointes (c’est-à-dire d’intersection vide) et que leur réunion est égale à E.

Un entier naturel n non nul étant donné, on note E_n l’ensemble des entiers naturels compris entre 1 et n. L’ensemble E_n peut être considéré comme le modèle d’un ensemble fini de cardinal n dont on a numéroté les éléments. On s'intéresse donc ici aux partitions de E_n.

Exemples. — On se place dans $E_3 = \{1, 2, 3\}$. L'ensemble $\{\{1\}, \{2, 3\}\}$ est une partition de E_3 mais $\{\{1\}, \{1, 2, 3\}\}$ n'en n'est pas une puisque les deux sous-ensembles contiennent tous les deux l'élément 1 et $\{\{1\}, \{2\}\}$ n'est pas non plus une partition de E_3 puisque l'élément 3 n'appartient pas à l'union des sous-ensembles considérés.

1.2 Dénombrement des partitions de cardinal donné

Soient n un entier naturel non nul fixé et k un entier naturel fixé entre 1 et n, on note alors $P_{n,k}$ le nombre de partitions de E_n en k sous-ensembles. *L'objet de ce paragraphe 1 est précisément la détermination de $P_{n,k}$.*

L'étude de E_1 ne présentant que peu de difficultés, dans toute la suite on considèrera $n > 1$ sous réserve qu'une autre hypothèse ne soit mentionnée.

Quelques valeurs particulières

- Il existe une unique partition de E_n ne comportant qu'un sous-ensemble : la partition $\{E_n\}$ donc
$$P_{n,1} = 1.$$
- Il existe une unique partition de E_n comportant n sous-ensembles : la partition $\{\{1\}, \dots, \{n\}\}$ donc
$$P_{n,n} = 1.$$
- Pour constituer une partition en $n - 1$ sous-ensembles, il faut et il suffit de choisir les deux éléments parmi les n possibles qui seront dans le même sous-ensemble donc
$$P_{n,\, n-1} = \binom{n}{2}.$$
- Pour constituer une partition en 2 sous-ensembles non vides, on commence par constituer un premier sous ensemble dont le cardinal k est compris entre 1 et $n - 1$

(le second sous-ensemble étant son complémentaire). Le nombre de façons de le faire est $\binom{n}{k}$. Le nombre de sous ensembles dont le cardinal est compris entre 1 et $n-1$ est donc

$$\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\underbrace{-\binom{n}{0}-\binom{n}{n}}_{-2}.$$

On reconnait le développement du binôme de Newton $(1+1)^n$, d'où

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k1^{n-k} - 2,\\ &= 2^n - 2,\end{aligned}$$

mais ce faisant, on compte deux fois chacune des partitions (en effet, $\{\{1\},\{2,3\}\}$ et $\{\{2,3\},\{1\}\}$ sont deux partitions identiques).

Ainsi

$$P_{n,\,2} = \frac{2^n-2}{2} = 2^{n-1}-1.$$

1.3 À la recherche d'une expression de récurrence

Soient un entier naturel $n > 1$ et k un entier naturel fixé entre 1 et $n-1$, on cherche à exprimer le nombre $P_{n+1,k+1}$ de partitions de E_{n+1} en $k+1$ sous-ensembles en fonction de $P_{n,k}$ et $P_{n,k+1}$.

Ces partitions sont constituées :

- des partitions dans lesquelles l'élément $\{n+1\}$ apparaît en tant que singleton. Il y a $P_{n,k}$ telles partitions (il reste k sous-ensembles à constituer avec les n éléments de E_{n+1} distincts de $n+1$).
- des partitions de E_n comptant $k+1$ sous-ensembles et auxquelles on a adjoint l'élément $n+1$ à l'un des $k+1$ sous-ensembles. Il y a $(k+1)P_{n,k+1}$ telles partitions.

On peut en déduire l'égalité

$$P_{n+1,k+1} = P_{n,k} + (k+1)P_{n,k+1}.$$

1.4 À la recherche d'une expression explicite du nombre de partitions

Lien avec le nombre de surjections

Soient un entier naturel $n > 1$ et k un entier naturel fixé entre 1 et n. On convient d'abord de noter $S_{n,k}$ le nombre de surjections de E_n sur E_k.

Exemple. — Si je dispose de cinq boules à placer dans trois urnes de sorte qu'aucune ne soit vide, je dois d'abord attribuer à chacune des boules une urne de façon surjective, ce qui revient à déterminer le cardinal $S_{5,3}$ de l'ensemble des surjections E_5 dans E_3. Cette attribution étant effectuée, il reste à prendre en compte le fait qu'une partition en 3 sous-ensembles est associée à 3! surjections, puisque les urnes peuvent être permutées.

En généralisant cet exemple, on comprend que le nombre de partitions $P_{n,k}$ de E_n en k sous-ensembles est égal à $\frac{1}{k!} \times S_{n,k}$. On est amené à admettre la proposition suivante.

Proposition 1

Soit $P_{n,k}$ le nombre de partitions de E_n en k sous-ensembles et $S_{n,k}$ le nombre de surjections de E_n dans E_k. On a la relation

$$P_{n,k} = \frac{1}{k!} \times S_{n,k}.$$

Expliciter $P_{n,k}$ nécessite donc de calculer $S_{n,k}$, ce qui est l'objet du paragraphe suivant.

Calcul du nombre de surjections entre deux ensembles de cardinaux connus

Lemme

Soient un entier naturel $n > 1$ et k un entier naturel fixé entre 1 et n et $S_{n,k}$ le nombre de surjections de E_n dans E_k. On a l'égalité

$$k^n = \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} S_{n,j}\,.$$

Démonstration

Tout d'abord, une application de E_n dans E_k est définie en attribuant une image à chaque élément de E_n : on a pour cela k choix possibles. Ainsi, le nombre d'applications de E_n dans E_k est k^n.

Ensuite, l'ensemble des applications E_n dans E_k est la réunion disjointe des surjections de E_n dans un sous-ensemble de E_k à j éléments, pour j entier compris entre 1 et k. Or, l'entier j étant fixé entre 1 et k, pour obtenir une surjection de E_n dans un sous-ensemble de E_k à j éléments, il suffit de choisir j éléments parmi k (qui seront les éléments admettant au moins un antécédent) et de choisir une surjection parmi les $S_{n,j}$ existant.

On a comme annoncé l'égalité $k^n = \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} S_{n,j}$. ■

Nous sommes maintenant en mesure d'établir la proposition suivante, dont la démonstration proposée utilise des notions d'algèbre linéaire (une démonstration purement calculatoire est également possible : elle est fournie en annexe).

Proposition 2

Le nombre $S_{n,\,k}$ de surjections de $E_n = \{1, \cdots, n\}$ dans $E_k = \{1, \cdots, k\}$ vaut

$$S_{n,k} = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n \,.$$

Démonstration

Soient un entier naturel $n > 1$ et k un entier naturel fixé entre 1 et n. L'égalité $k^n = \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} S_{n,j}$ peut être vue comme la k-ième ligne de la traduction sous la forme d'un système de l'égalité matricielle $U = A \times V$ où

$$U = \begin{pmatrix} 1^n \\ \vdots \\ k^n \\ \vdots \\ n^n \end{pmatrix}, \quad A = (a_{i,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}} = \left(\binom{i}{j}\right)_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}} \quad \text{et} \quad V = \begin{pmatrix} S_{n,1} \\ \vdots \\ S_{n,k} \\ \vdots \\ S_{n,n} \end{pmatrix}.$$

La matrice A est triangulaire inférieure, de coefficients diagonaux valant tous 1.

Ainsi :

$$\begin{pmatrix} 1^n \\ 2^n \\ \vdots \\ k^n \\ \vdots \\ n^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \binom{1}{1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \binom{k}{1} & \binom{k}{2} & \binom{k}{3} & \cdots & \binom{k}{k} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \binom{n}{3} & \cdots & \cdots & \cdots & \binom{n}{n} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} S_{n,1} \\ S_{n,2} \\ \vdots \\ S_{n,k} \\ \vdots \\ S_{n,n} \end{pmatrix}$$

On remarque que la matrice A est la transposée de matrice de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $f(P) = P(X+1)$ à laquelle on a enlevé sa première ligne et sa première colonne.

En effet, d'après le binôme de Newton, pour tout entier naturel j compris entre 0 et n, on a

$$(X+1)^j = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} X^i \,.$$

La matrice $B \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ de l'endomorphisme f dans la base canonique est la matrice définie par $b_{i,\,j} = \binom{j-1}{i-1}$ si $i \leq j$ et $b_{i,\,j} = 0$ sinon, soit, de façon explicite :

$$B = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \binom{2}{0} & \binom{3}{0} & \cdots & \binom{n}{0} \\ 0 & \binom{1}{1} & \binom{2}{1} & \binom{3}{1} & \cdots & \binom{n}{1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \binom{k-1}{k-1} & \cdots & \binom{n}{k-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \binom{n}{n} \end{pmatrix}$$

Or, l'endomorphisme f est inversible (cela peut notamment être justifié par le fait que la matrice B qui le représente dans la base canonique est inversible puisque triangulaire et ne comportant aucun coefficient diagonal nul), son inverse est l'endomorphisme f^{-1} défini sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $f^{-1}(P) = P(X-1)$.

Le binôme de Newton permet d'écrire

$$(X-1)^j = \sum_{i=0}^{j} \binom{i}{j} (-1)^{j-i} X^i \,.$$

Dans la base canonique, la matrice qui représente f^{-1} est la matrice C définie par

$$c_{i,j} = \begin{cases} (-1)^{j-i}\binom{j-1}{i-1} & \text{si } i \leq j, \\ c_{i,j} = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

soit, de façon explicite :

$$C = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & -\binom{1}{0} & \binom{2}{0} & -\binom{3}{0} & \cdots & (-1)^n\binom{n}{0} \\ 0 & \binom{1}{1} & -\binom{2}{1} & \binom{3}{1} & \cdots & (-1)^{n-1}\binom{n}{1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \binom{k-1}{k-1} & \cdots & (-1)^{n-k+1}\binom{n}{k-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \binom{n}{n} \end{pmatrix}$$

On considère alors la matrice $\tilde{C}$ obtenue en éliminant les premières ligne et colonne. Le produit de la k-ième ligne de la transposée ${}^t\tilde{C}$ de $\tilde{C}$ par la matrice colonne U donne le coefficient $S_{n,\,k}$.

Avec

$${}^t\tilde{C} = \begin{pmatrix} \binom{1}{1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\binom{2}{1} & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (-1)^{k-1}\binom{k}{1} & \cdots & \binom{k}{k} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (-1)^{n-1}\binom{n}{1} & \cdots & (-1)^{n-k}\binom{n}{k} & \cdots & \binom{n}{n} \end{pmatrix}$$

on obtient

$$\begin{pmatrix} \binom{1}{1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\binom{2}{1} & \binom{2}{2} & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (-1)^{k-1}\binom{k}{1} & \cdots & \binom{k}{k} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (-1)^{n-1}\binom{n}{1} & \cdots & (-1)^{n-k}\binom{n}{k} & \cdots & \binom{n}{n} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1^n \\ 2^n \\ \vdots \\ k^n \\ \vdots \\ n^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{n,1} \\ S_{n,2} \\ \vdots \\ S_{n,k} \\ \vdots \\ S_{n,n} \end{pmatrix}$$

et notamment

$$S_{n,\,k} = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n\,. \qquad \blacksquare$$

Remarque. — Ces cardinaux $S_{n,k}$ de l'ensemble des surjections d'un ensemble à n éléments dans un ensemble à k éléments s'appellent les nombres de Stirling de seconde espèce.

Dénombrement des partitions

On peut alors déduire de ce qui précède l'expression explicite du nombre de partitions de E_n en k sous-ensembles.

PROPOSITION 3
Le nombre de partitions de $E_n = \{1, 2, \dots, n\}$ en k sous-ensembles vaut

$$P_{n,k} = \frac{1}{k!} \sum_{j=1}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n.$$

Démonstration
Ce résultat est la conséquence directe de l'expression explicite de $S_{n,k}$ (proposition 2 page 7) et de la proposition 1 page 6. $\blacksquare$

Le nombre total de partitions de l'ensemble E_n s'en déduit également :

COROLLAIRE
Le nombre total de partitions de $E_n = \{1, \dots, n\}$ vaut

$$\sum_{k=1}^{n} P_{n,k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \sum_{j=1}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n.$$

2 MOYENNE DES MOYENNES D'UNE PARTITION

On appelle *par abus de langage* moyenne des moyennes d'une partition de E_n la moyenne des moyennes des éléments de chacun des sous-ensembles composant cette partition. Pour toute partition $\mathcal{P}$ de E_n, on note $M_2(\mathcal{P})$ la moyenne des moyennes de $\mathcal{P}$. En pratique, pour calculer $M_2(\mathcal{P})$, on calcule la moyenne arithmétique de chaque sous-ensemble de la partition $\mathcal{P}$ et on effectue ensuite la moyenne arithmétique de ces moyennes.

L'ensemble des partitions de $E_n = \{1, \dots, n\}$ étant fini, il en va de même pour l'ensemble des moyennes des moyennes de ces partitions. Cet ensemble admet donc un minimum. C'est à ce minimum que nous allons nous intéresser dans le présent paragraphe. Dans toute la suite, on dira qu'une partition $\mathcal{P}$ est *optimale* si elle rend minimale la moyenne des moyennes $M_2(\mathcal{P})$.

Un entier k vérifiant $1 \leq k \leq n$ étant donné, on dira qu'une partition $\mathcal{P}$ est k-optimale si elle rend minimale la moyenne des moyennes de partitions de E_n en k sous-ensembles.

En pratique, on se propose de répondre à deux questions :

1. Quelles sont les partitions optimales de E_n ?
2. Quelle est la valeur minimale de $M_2(\mathcal{P})$?

Exemples

Intéressons-nous à $E_{12} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$.

1. Soit la partition $\mathcal{P}_1 = \{E_{12}\}$. La somme des éléments de $\mathcal{P}_1$ nous est connue et vaut $(12 \times 13)/2$. Donc
$$M_2(\mathcal{P}_1) = \frac{1}{12} \times \frac{12 \times 13}{2} = 6{,}5.$$
2. Soit la partition
$$\mathcal{P}_2 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}, \{7\}, \{8\}, \{9\}, \{10\}, \{11\}, \{12\}\}.$$
Le calcul ne diffère pas du précédent et on a là encore
$$M_2(\mathcal{P}_2) = \frac{1}{12} \times \frac{12 \times 13}{2} = 6{,}5.$$
3. Soit la partition
$$\mathcal{P}_3 = \{\{2, 5\}, \{8\}, \{1, 6, 10, 11\}, \{3, 4, 7, 9, 12\}\}.$$
On calcule la moyenne de chaque élément de $\mathcal{P}_3$:
$$\frac{2+5}{2} = 3{,}5\,,\ 8\,,\ \frac{1+6+10+11}{4} = 7\,,\qquad \frac{3+4+7+9+12}{5} = 7.$$

On calcule ensuite la moyenne de ces quatre moyennes :

$$\frac{3{,}5 + 8 + 7 + 7}{4} = 6{,}375.$$

Donc

$$M_2(\mathcal{P}_3) = 6{,}375.$$

Remarque. — On constate que $M_2(\mathcal{P}_3)$ est inférieure à $M_2(\mathcal{P}_1) = M_2(\mathcal{P}_2)$.

2.1 Premières propriétés de la moyenne des moyennes

On peut tout d'abord s'intéresser aux partitions de E_n dont tous les éléments ont le même effectif. On peut d'ailleurs remarquer que cet effectif commun ainsi que le cardinal d'une telle partition sont des diviseurs de n. Nous avons rencontré dans les exemples ci-dessus les cas de la partition ne contenant que la partie E_n ainsi que celui de la partition formée de n singletons. Mais pour peu que n ne soit pas premier, d'autres situations peuvent se présenter. D'une façon générale, si n est le produit de deux entiers naturels m et p, il existe des partitions en p parties de cardinal m ainsi que des partitions en m parties de cardinal p. Les moyennes de moyennes des partitions en parties de même cardinal possèdent une propriété remarquable :

PROPOSITION 4

Soit n un entier naturel strictement supérieur à 1. Les moyennes des moyennes des partitions de E_n formées de sous-ensembles de même cardinal sont toutes égales à $\dfrac{n+1}{2}$.

Démonstration

Soit $\mathcal{P}$ une partition de E_n en m sous-ensembles de cardinal p (on a donc $n = mp$). Notons, pour i compris entre 1 en n,

A_i les éléments de $\mathcal{P}$. On a

$$\begin{aligned} M_2(\mathcal{P}) &= \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{1}{p}\sum_{k\in A_i} k\right), \\ &= \frac{1}{mp}\sum_{i=1}^{m}\sum_{k\in A_i} k, \end{aligned}$$

et puisque, d'une part, par définition d'une partition, chaque élément de E_m apparaît exactement une fois dans un et un seul des A_k et, d'autre part, que $n = mp$, on a

$$\begin{aligned} M_2(\mathcal{P}) &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k, \\ &= \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)}{2}, \\ &= \frac{n+1}{2}\,. \end{aligned}$$

Ce résultat est indépendant des diviseurs m et p choisis donc toute partition $\mathcal{P}$ de E_n en sous-ensembles de même cardinal est telle que $M_2(\mathcal{P}) = (n+1)/2$. ■

Nous allons maintenant voir qu'il est dans la plupart des cas possible de définir une partition de E_n dont la moyenne des moyennes possède un minimum strictement inférieur à $(n+1)/2$.

Proposition 5

Soient deux entiers naturels n et m tels que $n > 2$ et $1 < m < n$. Il existe une partition $\mathcal{P}$ de E_n de cardinal m et dont la moyenne des moyennes est strictement inférieure à $(n+1)/2$.

Démonstration

Pour démontrer cette assertion, il suffit d'exhiber une partition de E_n en m sous-ensembles pour laquelle la valeur de $M_2(\mathcal{P})$ est strictement inférieure à $\dfrac{n+1}{2}$.

Considérons $\mathcal{P}$, la partition de E_n de cardinal m définie par

$$\mathcal{P} = \{\underbrace{\{1\}, \dots, \{m-1\}}_{\text{au moins 1 partie}}, \underbrace{\{m, m+1, \dots, n\}}_{\text{au moins 2 éléments}}\}.$$

On a

$$\begin{aligned} M_2(\mathcal{P}) &= \frac{1}{m}\left(1+\cdots+(m-1)+\frac{m+(m+1)+\cdots+n}{n-m+1}\right), \\ &= \frac{1}{m}\left(\frac{m(m-1)}{2}+\frac{m+(m+1)+\cdots+n}{n-m+1}\right), \\ &= \frac{1}{m}\left(\frac{m(m-1)}{2}+\frac{(m+n)(n-m+1)}{2(n-m+1)}\right), \\ &= \frac{1}{m}\left(\frac{m(m-1)}{2}+\frac{m+n}{2}\right), \\ &= \frac{m^2+n}{2m}\,. \end{aligned}$$

Donc

$$M_2(\mathcal{P}) - \frac{n+1}{2} = \frac{m^2+n-nm-m}{2m} = \frac{(m-n)(m-1)}{2m}\,.$$

Compte tenu des conditions énoncées sur m et n, il apparaît que

$$M_2(\mathcal{P}) < \frac{n+1}{2}$$ ■

Reste à déterminer la ou les partitions optimales, dont nous savons à présent qu'elles ne sont pas à chercher parmi les partitions en sous-ensembles de même cardinal.

Proposition 6

Soient p_1, p_2, s_1, s_2 des entiers tous non nuls et inférieurs à n vérifiant $p_1 > p_2$ et $s_1 < s_2$ et considérons une partition $\mathcal{P}$ de E_n dans laquelle il existe des parties P_1 et P_2 de cardinaux respectifs s_1 et s_2 contenant respectivement les éléments p_1 et p_2. En échangeant p_1 et p_2 (c'est-à dire en mettant le grand élément dans la grande partie et le petit élément dans la petite partie) on obtient une partition $\mathcal{P}'$ telle que $M_2(\mathcal{P}') \leq M_2(\mathcal{P})$.

Nous proposons d'abord un exemple, la démonstration de cette propriété suivra.

Exemple

Soit $\mathcal{P}$ la partition de E_{12} définie par

$$\mathcal{P} = \{\{1,2,3\},\{4,6,9\},\{7,8\},\{5,10,11,12\}\}.$$

En échangeant le 5 et le 9, on obtient une nouvelle partition $\mathcal{P}'$ définie par

$$\mathcal{P}' = \{\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}, \{7, 8\}, \{9, 10, 11, 12\}\}.$$

On a

$$\begin{aligned}
M_2(\mathcal{P}) &= \frac{1}{4}\Bigg(\frac{5+10+11+12}{4} + \frac{4+9+6}{3} \\
&\qquad + \overbrace{\frac{7+8}{2} + \frac{1+2+3}{3}}^{q}\Bigg), \\
&= \frac{1}{4}\Bigg(\frac{19}{2} + \frac{19}{3} + \frac{15}{2} + 2\Bigg), \\
&= \frac{76}{12}.
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
M_2(\mathcal{P}') &= \frac{1}{4}\Bigg(\frac{9+10+11+12}{4} + \frac{4+5+6}{3} \\
&\qquad + \overbrace{\frac{7+8}{2} + \frac{1+2+3}{3}}^{q}\Bigg), \\
&= \frac{1}{4}\Bigg(\frac{21}{2} + 5 + \frac{15}{2} + 2\Bigg), \\
&= \frac{75}{12}.
\end{aligned}$$

On constate que $M_2(\mathcal{P}') < M_2(\mathcal{P})$ et on observe également que seuls les termes relatifs aux parties concernées par la permutation sont à l'origine de la différence entre les valeurs de $M_2(\mathcal{P})$ et $M_2(\mathcal{P}')$: la somme des autres termes est dans les deux cas de la forme $q/4$ où q est un nombre rationnel dont la valeur importe peu.

Forts de la remarque qui précède, nous pouvons passer à la démonstration de la propriété 6.

Démonstration

Notons N le cardinal commun aux deux partitions considérées.

Il existe un nombre rationnel q tel que

$$M_2(\mathcal{P}) = \frac{1}{N}\left(\frac{p_1 + \cdots + p_{s_1}}{s_1} + \frac{p_2 + \cdots + p_{s_2}}{s_2} + q\right)$$

et

$$M_2(\mathcal{P}') = \frac{1}{N}\left(\frac{p_2 + \cdots + p_{s_1}}{s_1} + \frac{p_1 + \cdots + p_{s_2}}{s_2} + q\right).$$

On forme la différence membre à membre des deux égalités après multiplication par N. On obtient

$$\begin{aligned} N(M_2(\mathcal{P}) - M_2(\mathcal{P}')) &= \frac{p_1 - p_2}{s_1} + \frac{p_2 - p_1}{s_2}, \\ &= \frac{(p_1 - p_2)(s_2 - s_1)}{s_1 s_2}, \\ &> 0 \quad \text{puisque } p_1 > p_2 \text{ et } s_1 < s_2. \blacksquare \end{aligned}$$

2.2 Rappels de quelques propriétés de la moyenne arithmétique

Rappelons sans démonstration certaines propriétés de la moyenne arithmétique d'un ensemble qui nous seront utiles pour trouver une partition $\mathcal{P}$ de E_n rendant la valeur de $M_2(\mathcal{P})$ minimale.

Pour tout ensemble fini non vide E de nombres réels, on note :

- $\mathrm{Moy}(E)$ la moyenne arithmétique des éléments de E ;
- $\min(E)$ et $\max(E)$ respectivement, le plus petit et le plus grand élément de E.

Pour tout ensemble fini E de p entiers naturels non nuls, on a les propriétés suivantes :

1. On a
$$\min(E) \leq \mathrm{Moy}(E) \leq \max(E).$$
2. Si on adjoint à E un élément M plus grand que tous les autres, alors la moyenne augmente :
$$\text{Si } M \geq \max(E), \text{ alors } \mathrm{Moy}(E \cup \{M\}) \geq \mathrm{Moy}(E).$$
3. Si on retire à E son plus petit élément (pour $p \geq 2$), la moyenne augmente :
$$\mathrm{Moy}(E \setminus \{\min(E)\}) \geq \mathrm{Moy}(E).$$

4. S'il existe deux entiers positifs m et p tels que $n = mp$ alors, pour toute partition $\mathcal{P}$ de E en m sous-ensembles de même cardinal p, on a
$$M_2(\mathcal{P}) = \mathrm{Moy}(E).$$

2.3 Recherche d'une partition optimale

Soit $n > 1$. On cherche une partition optimale $\mathcal{P}$ de E_n (on rappelle que cela signifie que $\mathcal{P}$ rend $M_2(\mathcal{P})$ le plus petit possible). Supposons que $\mathcal{P}$ est une partition optimale de E_n. Pour tout entier naturel non nul p, on considère le sous-ensemble $\mathcal{P}_p$ des éléments de $\mathcal{P}$ (ce sont donc des parties de E_n) qui ont le même cardinal p (on notera que $\mathcal{P}_p$ n'est pas nécessairement non vide).

On dira que l'élément a de E_n est *représenté* dans $\mathcal{P}_p$ si a appartient à l'un des éléments de $\mathcal{P}_p$.

Proposition 7
Soit $\mathcal{P}$ une partition optimale de E_n et p un entier strictement supérieur à 1. Si $\mathcal{P}_p$ est non vide, l'ensemble des éléments de E_n qui sont représentés dans $\mathcal{P}_p$ est constitué d'entiers consécutifs.

Démonstration

Soit a le plus petit et c le plus grand des éléments de E_n représentés dans $\mathcal{P}_p$ et soit $b \in E_n$ tel que $a < b < c$. En vertu la proposition 6 :

- L'élément b étant strictement supérieur à a, il doit se trouver dans un élément de $\mathcal{P}$ de cardinal supérieur ou égal à celui dans lequel se trouve a, sinon en permutant a et b on ferait décroître la valeur de $M_2(\mathcal{P})$.
- L'élément b étant strictement inférieur à c, il doit pour la même raison se trouver dans un élément de $\mathcal{P}$ de cardinal inférieur ou égal à celui dans lequel se trouve c.

On en déduit, puisque la partition considérée est optimale, que b est dans une partie de cardinal p de la partition $\mathcal{P}$. Autrement dit b est représenté dans $\mathcal{P}_p$. L'ensemble des éléments de E_n représentés dans $\mathcal{P}_p$ est donc constitué d'éléments consécutifs. ■

On rappelle maintenant qu'un entier k vérifiant $1 < k < n$ étant donné, une partition $\mathcal{P}$ est dite k-optimale si elle rend minimale la moyenne des moyennes de partitions de E_n en k sous-ensembles.

Proposition 8
Soit n un entier naturel non nul strictement supérieur à 2 et k un entier vérifiant $1 < k < n$. De toutes les partitions de E_n en k sous-ensembles, la partition $\{\{1\}, \dots, \{k-1\}, \{k, \dots, n\}\}$ est k-optimale.

Démonstration
Tout d'abord, d'après la proposition précédente, chacun des sous-ensembles d'une partition optimale est constitué d'entiers consécutifs. Considérons une partition k-optimale de E_n. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe dans cette partition deux sous-ensembles distincts S et T de cardinaux supérieurs ou égaux à 2 et désignons par e_s le plus grand des éléments de S. Supposons de plus que $e_s < \min(T)$. La nouvelle partition obtenue en transférant e_s dans T, toutes choses étant restées par ailleurs inchangées, aurait une moyenne des moyennes inférieure à celle de la partition initiale, puisque $\mathrm{Moy}(S \smallsetminus \{e_s\} < \mathrm{Moy}(S)$ et que $\mathrm{Moy}(T \cup \{e_s\} < \mathrm{Moy}(T)$. La partition initiale ne serait donc pas k-optimale, ce qui est contraire à l'hypothèse. On peut donc affirmer qu'une partition k-optimale est constituée de $k-1$ singletons et du sous-ensemble des $n-k+1$ éléments restants.

Enfin, conséquence directe de la proposition 6 page 14, les $k-1$ singletons sont constitués par les éléments les plus petits de E_n. On a ainsi démontré que de toutes les partitions de E_n en k sous-ensembles, la partition $\{\{1\}, \dots, \{k-1\}, \{k, \dots, n\}\}$ est k-optimale. ■

Reste à déterminer la (ou les) valeur(s) de k qui minimise(nt) $M_2(\mathcal{P})$ parmi les partitions $E_n = \{1, \dots, n\}$ en k sous-ensembles de la forme $\{\{1\}, \dots, \{k-1\}, \{k, k+1, \dots, n\}\}$, ce qui était l'objet du problème posé. L'entier k étant fixé compris entre 1 et n, l'ensemble des partitions k-optimales est fini et par suite l'ensemble de leurs moyennes de moyennes, constitue un ensemble fini de $\mathbb{R}$. Il admettent donc nécessairement un plus petit élément et il existe de ce fait au moins une partition de E_n optimale.

PROPOSITION 9

Soit n un entier naturel non nul et k un entier vérfiant $1 \leq k \leq n$, la moyenne des moyennes d'une partition k-optimale $\mathcal{P}$ de E_n est

$$M_2(\mathcal{P}) = \frac{1}{2}\left(k + \frac{n}{k}\right).$$

Démonstration

On a :

$$\begin{aligned}
M_2(\mathcal{P}) &= \frac{1}{k}\left(1 + 2 + \cdots + (k-1) + \frac{k + (k+1) + \cdots + n}{n - (k-1)}\right), \\
&= \frac{1}{k}\left(\frac{(1 + (k-1))(k-1)}{2} + \frac{(n+k)(n-(k-1))}{2(n-(k-1))}\right), \\
&= \frac{1}{k}\left(\frac{k^2 - k}{2} + \frac{n+k}{2}\right), \\
&= \frac{1}{2}\left(k + \frac{n}{k}\right).
\end{aligned}$$

Un réel x étant donné, on rappelle que $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x.

PROPOSITION 10

Une partition est optimale si et seulement si elle est k-optimale pour $k = \left\lfloor \sqrt{n} \right\rfloor$ et $k = \left\lfloor \sqrt{n} \right\rfloor + 1$.

Démonstration

Soit n un entier naturel non nul et k un entier vérfiant $1 \leq k \leq n$.

Rappelons qu'une partition $\mathcal{P}$ est *optimale* si elle rend minimale la moyenne des moyennes $M_2(\mathcal{P})$ et qu'une partition est k-optimale si elle rend minimale la moyenne des moyennes des partitions de E_n en k sous-ensembles. Ainsi, le minimum des moyenne des moyennes $M_2(\mathcal{P})$ est à chercher parmi les minimums des moyennes de moyennes des sous-ensembles des partitions de E_n en k sous-ensembles. Donc la (ou les) partitions réalisant le minimum de $M_2(\mathcal{P})$, et de ce fait optimales, appartient à l'ensemble des partitions k-optimale.

La fonction

$$f_n \ : \ ]0,+\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{n}{x}\right)$$

est dérivable comme produit d'une constante par une somme de fonctions identité et inverse, dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$. Notons f_n' sa dérivée.

Pour tout réel $x > 0$,

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{n}{x^2}\right), \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{(x-\sqrt{n})(x+\sqrt{n})}{x^2}\right). \end{aligned}$$

Sur $]0,+\infty]$, $f_n'(x)$ est du signe de $(x-\sqrt{n})$. La fonction f_n admet donc un minimum en $x = \sqrt{n}$ dont la valeur est

$$f_n(\sqrt{n}) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{n} + \frac{n}{\sqrt{n}}\right) = \sqrt{n}.$$

- Si n est un carré parfait, la partition $\{\{1\},\dots,\{\sqrt{n}-1\},\{\sqrt{n},\dots,n\}\}$ est l'unique partition optimale.
- Sinon, en posant $m = \lfloor\sqrt{n}\rfloor$, on an $m < \sqrt{n} < m+1$ et la comparaison des valeurs de $f_n(m)$ et de $f_n(m+1)$ va permettre de déterminer la partition cherchée.
  On a
  $$f_n(m) = \frac{1}{2}\left(m + \frac{n}{m}\right) \quad \text{et} \quad f_n(m{+}1) = \frac{1}{2}\left(m+1+\frac{n}{m+1}\right)$$
  On forme leur différence :
  $$\begin{aligned} f_n(m) - f_n(m+1) &= \frac{1}{2}\left(m + \frac{n}{m}\right) - \frac{1}{2}\left(m+1+\frac{n}{m+1}\right), \\ &= \frac{1}{2}\left(-1 + n\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}\right)\right), \\ &= \frac{1}{2}\left(-1 + n \times \frac{1}{m(m+1)}\right), \\ &= \frac{1}{2m(m+1)}\left(-m(m+1)+n\right), \end{aligned}$$
  qui est du signe de $-m(m+1)+n$.
  On en déduit alors que :

- Le minimum est $f_n(m+1)$ si et seulement si $f_n(m) > f_n(m+1)$ c'est-à dire si et seulement si $n > m(m+1)$.
- Le minimum est $f_n(m)$ si et seulement si $f_n(m) < f_n(m+1)$ c'est-à dire si et seulement si $n < m(m+1)$. ■

Remarque. — Le lecteur aura peut-être reconnu f_n comme étant la fonction qui permet par récurrence de la forme $u_{k+1} = f_n(u_k)$ d'approximer $\sqrt{n}$, par exemple avec des rationnels si $u_0 \in \mathbb{Q}$. Cela correspond alors à l'algorithme de Héron, ou à la méthode de recherche de racine d'une fonction dérivable dite de Newton-Raphson (méthode des tangentes) appliquée à la fonction $x \longmapsto x^2 - n$.

On peut à présent s'interroger sur les valeurs de n pour lesquelles il existe plusieurs partitions optimales.

PROPOSITION 11
Pour les valeurs de n qui sont le produit de deux entiers consécutifs, il existe exactement deux partitions qui permettent à $M_2(P)$ de réaliser son minimum.

Démonstration
Lorsque $\sqrt{n}$ n'est pas entier, il est encadré par deux entiers $m = \lfloor\sqrt{n}\,\rfloor$ et $m+1 = \lfloor\sqrt{n}\,\rfloor + 1$. On a $f_n(m) = f_n(m+1)$ si et seulement si

$$\frac{1}{2}\left(m + \frac{n}{m}\right) = \frac{1}{2}\left(m + 1 + \frac{n}{m+1}\right).$$

La résolution de cette équation d'inconnue n permet d'obtenir l'égalité $n = m(m+1)$. ■

Annexe

Dans cette annexe, nous proposons une démonstration calculatoire du résultat déjà énoncé :

Proposition
Le nombre $S_{n,\,k}$ de surjections de $E_n = \{1, \cdots, n\}$ dans $E_k = \{1, \cdots, k\}$ vaut

$$S_{n,k} = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n \,.$$

Démonstration calculatoire
On a grâce au lemme page 6 :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n &= \sum_{j=1}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \sum_{\ell=1}^{j} \binom{j}{\ell} S_{n,\ell}, \\
&= \sum_{j=1}^{k} \sum_{\ell=1}^{j} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \binom{j}{\ell} S_{n,\,\ell}, \\
&= \sum_{j=1}^{k} \sum_{\ell=1}^{j} (-1)^{k-j} \frac{k!}{j!(k-j)!} \; \frac{j!}{\ell!(j-\ell)!} S_{n,\ell}, \\
&= \sum_{j=1}^{k} \sum_{\ell=1}^{j} (-1)^{k-j} \frac{k!}{\ell!(k-\ell)!} \times \frac{(k-\ell)!}{(j-\ell)!(k-j)!} \, S_{n,\ell}.
\end{aligned}$$

Les sommes étant finies, on peut les intervertir :

$$\sum_{j=1}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n = \sum_{j=1}^{k} \sum_{\ell=1}^{j} (-1)^{k-j} \binom{k}{\ell} \binom{k-\ell}{j-\ell} S_{n,\ell}.$$

À j fixé, ℓ varie de 1 à j. On a une somme double triangulaire. À ℓ fixé, j varie de ℓ à k.

Ainsi, il vient

$$\sum_{j=1}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n = \sum_{\ell=1}^{k} (-1)^k \, S_{n,\ell} \sum_{j=\ell}^{k} (-1)^{-j} \binom{k}{\ell} \times \binom{k-\ell}{j-\ell}.$$

Posons $r = j - \ell$. On a alors $j = r + \ell$ et r varie de 0 à $k - \ell$. Remarquant que $(-1)^{-j} = (-1)^j$ et que le coefficient $\binom{k}{\ell}$ est indépendant de j, on peut alors écrire

$$\sum_{j=1}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}j^n = \sum_{\ell=1}^{k}(-1)^{k}\binom{k}{\ell}\,\mathrm{S}_{n,\ell}\sum_{r=0}^{k-\ell}(-1)^{r+\ell}\binom{k-\ell}{r},$$

soit

$$\sum_{j=1}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}j^n = \sum_{\ell=1}^{k}(-1)^{k+\ell}\binom{k}{\ell}\,\mathrm{S}_{n,\ell}(1-1)^{k-\ell}.$$

Le nombre $(1-1)^{k-\ell}$ étant nul sauf pour la valeur $\ell = k$, il ne reste plus que le terme $\mathrm{S}_{n,\,k}$ dans le membre de droite et on a ainsi établi l'égalité

$$\mathrm{S}_{n,k} = \sum_{j=1}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}j^n. \qquad \blacksquare$$